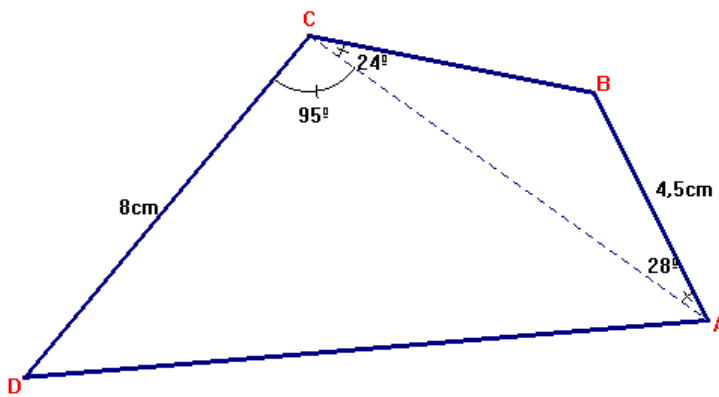


EXAMEN DE TRIGONOMETRÍA 2

1. Resuelve la inecuación y los sistemas de inecuaciones siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} 2x - y \leq 3 \\ x + 3 > 1 \end{array} \right\} \\ \text{b) } \left. \begin{array}{l} x - 1 < \frac{5x}{3} + 1 \\ \frac{x+5}{2} \leq x - \frac{1}{2} \\ 5 - 2(x+1) < 3 \end{array} \right\} \\ \text{c) } \frac{5x+10}{x-3} \geq 0 \end{array} \right\} \quad (2 \text{ puntos})$$

2. Obtén el perímetro del cuadrilátero de la figura: (2,5 puntos)



3. Sabemos que $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ con α en el primer cuadrante $\cos \beta = -\frac{2}{3}$ con β en el tercer cuadrante. (2,5 puntos)
Sin hallar el valor de los ángulos y expresando el resultado con fracciones y radicales, calcula:

a) $\sin(\alpha + \beta)$ b) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ c) $\cos 2\alpha$ d) $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$

4. Resuelve la ecuación: (1,5 puntos)
 $\operatorname{sen} 2x - 2 \cos^2 x = 0$

5. Comprueba la identidad: (1,5 puntos)

$$\frac{2 \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} 2x} = \cos x - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$$

SOLUCIONES

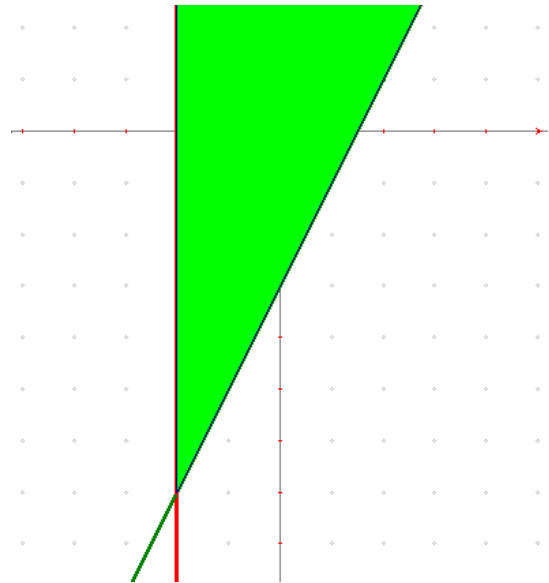
1. Resuelve la inecuación y los sistemas de inecuaciones siguientes:

a)
$$\left. \begin{matrix} 2x - y \leq 3 \\ x + 3 > 1 \end{matrix} \right\} \text{gráficamente, representamos}$$

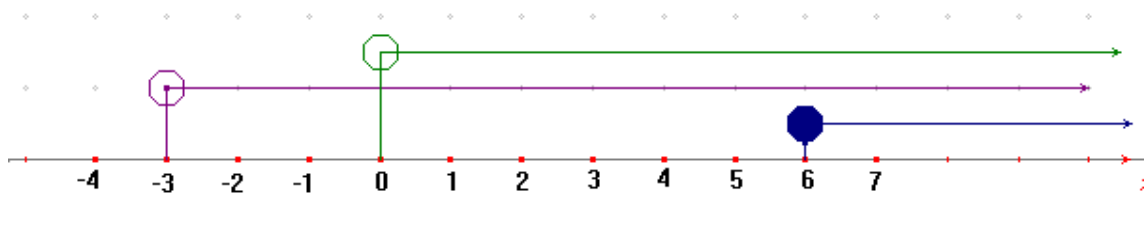
primero las rectas correspondientes,

$$\left. \begin{matrix} 2x - y = 3 \\ x + 3 = 1 \end{matrix} \right\} \rightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x = -2 \end{cases}, \text{ luego los}$$

semiplanos solución de cada una de las inecuaciones y la intersección de ambos semiplanos será la solución del sistema, teniendo en cuenta que entra en la solución la semirrecta $y = 2x - 3$ (en verde)



b)
$$\left. \begin{matrix} x - 1 < \frac{5x}{3} + 1 \\ \frac{x+5}{2} \leq x - \frac{1}{2} \\ 5 - 2(x+1) < 3 \end{matrix} \right\} \rightarrow \left. \begin{matrix} 3x - 3 < 5x + 3 \\ x + 5 \leq 2x - 1 \\ 5 - 2x - 2 < 3 \end{matrix} \right\} \rightarrow \left. \begin{matrix} 3x - 5x < 3 + 3 \\ x - 2x \leq -1 - 5 \\ -2x < 3 - 5 + 2 \end{matrix} \right\} \rightarrow \left. \begin{matrix} -2x < 6 \\ -x \leq -6 \\ -2x < 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow \left. \begin{matrix} x > -3 \\ x \geq 6 \\ x > 0 \end{matrix} \right\}$$



c)
$$\frac{1}{x-2} + \frac{0}{x-3} \geq 0$$

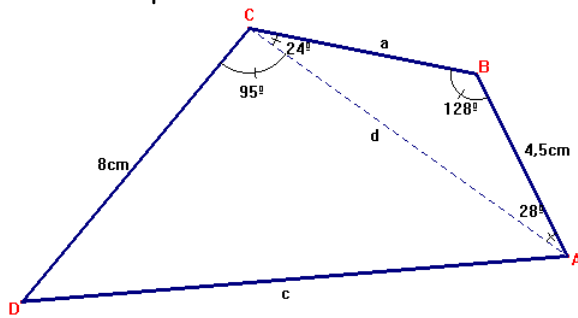
Solución del sistema: $[6, +\infty)$

c)
$$\frac{5x+10}{x-3} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} 5x+10=0 \Rightarrow x=-2 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases} \text{ estudiamos el signo por intervalos:}$$



Solución: $(-\infty, -2] \cup (3, +\infty)$

2. Obtén el perímetro del cuadrilátero de la figura:



En el triángulo ABC, tenemos el ángulo B:

$$\hat{B} = 180^\circ - (24^\circ + 28^\circ) = 128^\circ$$

Aplicamos el teorema del seno para hallar los otros dos lados del triángulo a y d:

$$\frac{4,5}{\text{sen}24^\circ} = \frac{a}{\text{sen}28^\circ} \Rightarrow a = 5,2\text{cm}$$

$$\frac{4,5}{\text{sen}24^\circ} = \frac{d}{\text{sen}128^\circ} \Rightarrow d = 8,7\text{cm}$$

Ahora nos vamos al triángulo ACD, en el que conocemos dos lados y el ángulo comprendido, aplicamos el teorema del coseno para hallar el lado c:

$$c^2 = 8^2 + 8,7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8,7 \cdot \cos 94^\circ \Rightarrow c = 12,3\text{cm}$$

$$\text{Perímetro: } P = 8 + 12,3 + 4,5 + 5,2 = 30\text{cm}$$

3. Sabemos que $\text{sen} \alpha = \frac{3}{5}$ con α en el primer cuadrante $\cos \beta = -\frac{2}{3}$ con β en el tercer cuadrante.

Empezamos hallando las razones de α y β :

$$\text{sen} \alpha = \frac{3}{5} \rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5} \rightarrow \text{tg} \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cos \beta = -\frac{2}{3} \rightarrow \text{sen}^2 \beta = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \rightarrow \text{sen} \beta = -\frac{\sqrt{5}}{3} \rightarrow \text{tg} \beta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{a) } \text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen} \alpha \cos \beta + \text{sen} \beta \cos \alpha = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \cdot \frac{4}{5} = -\frac{6 + 4\sqrt{5}}{15}$$

$$\text{b) } \text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg} \alpha - \text{tg} \beta}{1 + \text{tg} \alpha \cdot \text{tg} \beta} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{2}}{1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{3 - 2\sqrt{5}}{4}}{\frac{8 + 3\sqrt{5}}{8}} = \frac{6 - 4\sqrt{5}}{8 + 3\sqrt{5}}$$

$$\text{c) } \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16 - 9}{25} = \frac{7}{25}$$

$$\text{d) } \text{tg} \frac{\beta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{1 + \cos \beta}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)}} = \pm \sqrt{\frac{5}{1}} = -\sqrt{5} \quad \left(\frac{\beta}{2} \text{ está en el II cuadrante}\right)$$

$$4. \operatorname{sen} 2x - 2 \cos^2 x = 0 \rightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos x - 2 \cos^2 x = 0 \rightarrow 2 \cos x (\operatorname{sen} x - \cos x) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 90^\circ + 360^\circ k \\ x = 270^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ \operatorname{sen} x - \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \cos x \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 45^\circ + 360^\circ k \\ x = 225^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{array} \right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

5. Comprueba las identidades:

$$\frac{2 \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} 2x} = \cos x - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} \rightarrow \frac{2 \operatorname{sen} x}{\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}} = \frac{2 \operatorname{sen} x \cdot \cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} = \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$$

$$\frac{2 \operatorname{sen} x \cdot (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}{2 \operatorname{sen} x \cos x} = \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x} \rightarrow \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$$