

CONTROL ANÁLISIS

Mayo 2009

1. Calcula la derivada de la función $f(x) = x^2 - 3x$ aplicando la definición. Escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = -1$. (2 puntos)

2. Calcula las derivadas de las siguientes funciones: (3 puntos)

a) $y = \ln \left[\frac{x^2 - 2}{x^2 + 2} \right]$

b) $y = e^{1-5x} \operatorname{sen} x$

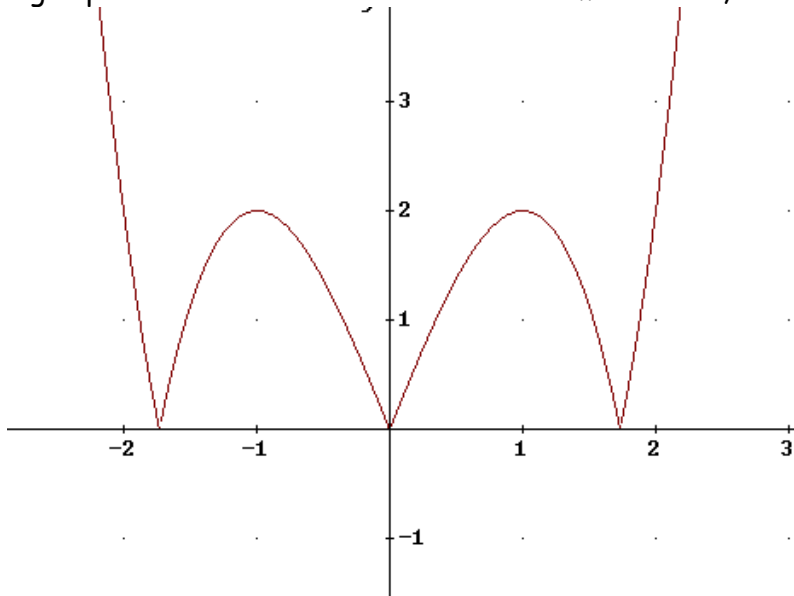
c) $y = \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}$

d) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{2x-3}$

3. Halla el valor de a para que la siguiente función sea continua en \mathbb{R} . ¿Es f derivable para ese valor de a ? Razona la respuesta. (2 puntos)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ \sqrt{x+a} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

4. Decide si la siguiente función es continua y derivable en todo su dominio. Si en algún punto no es continua o derivable o ambas cosas, razónalo. (1 punto)



5.- Estudia el crecimiento de la función $y = x^3 - 3x^2 + 4$. Halla razonadamente sus máximos y/o mínimos. (2 puntos)

SOLUCIONES

$$1. f(x) = x^2 - 3x, \text{ sabemos que } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - 3(x+h) - (x^2 - 3x) = x^2 + h^2 + 2xh - 3x - 3h - x^2 + 3x$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2xh - 3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+2x-3)}{h} = 2x - 3$$

recta tangente en el punto de abscisa $x = -1$:

$$y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \rightarrow f(-1) = (-1)^2 - 3(-1) = 4; f'(-1) = 2(-1) - 3 = -5$$

$$y - 4 = -5(x+1) \rightarrow y = -5x - 5 + 4 \rightarrow y = -5x - 1$$

2. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$a) y = \ln \left[\frac{x^2 - 2}{x^2 + 2} \right] \rightarrow y' = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2} \cdot \frac{2x(x^2 + 2) - (x^2 - 2) \cdot 2x}{(x^2 + 2)^2}$$

$$y' = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2} \cdot \frac{2x^3 + 4x - 2x^3 + 4x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2} \cdot \frac{8x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{8x}{x^4 - 4}$$

$$b) y = e^{1-5x} \operatorname{sen} x \rightarrow y' = e^{1-5x}(-5) \cdot \operatorname{sen} x + e^{1-5x} \cos x = e^{1-5x}(\cos x - 5 \operatorname{sen} x)$$

$$c) y = \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} \rightarrow y' = \frac{2 \cos x(-\operatorname{sen} x) \cdot \operatorname{sen} x - \cos^2 x \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$y' = \frac{-2 \cos x \cdot \operatorname{sen}^2 x - \cos^3 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-\cos x(2 \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$d) y = \operatorname{arctg} \sqrt{2x-3} \rightarrow y' = \frac{1}{1 + (\sqrt{2x-3})^2} \cdot \frac{2}{2\sqrt{2x-3}} = \frac{1}{(2x-2)\sqrt{2x-3}}$$

3. Halla el valor de a para que la siguiente función sea continua en \mathbb{R} . ¿Es f derivable para ese valor de a ? Razona la respuesta.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & \text{si } x < 3 \rightarrow \text{función cuadrática, continua} \\ \sqrt{x+a} & \text{si } x \geq 3 \rightarrow \text{función raíz cuadrada, continua si } x+a \geq 0 \end{cases}$$

Tiene que ser continua en $x=3$

$$\begin{cases} f(3) = \sqrt{3+a} \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 2x - 1) = 2 \rightarrow \sqrt{3+a} = 2 \rightarrow 3+a = 4 \rightarrow a = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x+a} = \sqrt{3+a} \end{cases}$$

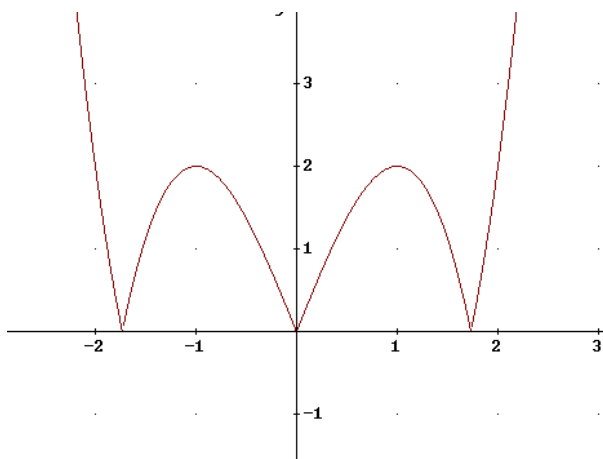
$$\text{Para } a = 1, \text{ la función es continua en } \mathbb{R}. f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Derivabilidad: Cada trozo es derivable, aunque $\sqrt{x+1}$ no lo sería en $x = -1$, pero no está definida en ese punto. Queda ver, por tanto, si es derivable en $x = 3$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{si } x < 3 \\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}} & \text{si } x > 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(3^-) = 2 \cdot 3 - 2 = 4 \\ f'(3^+) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ no derivable en } x=3$$

La función es continua en \mathbb{R} y derivable en $\mathbb{R} - \{3\}$

4. Decide si la siguiente función es continua y derivable en todo su dominio. Si en algún punto no es continua o derivable o ambas cosas, razónalo.



Dominio \mathbb{R}

Continua en \mathbb{R}

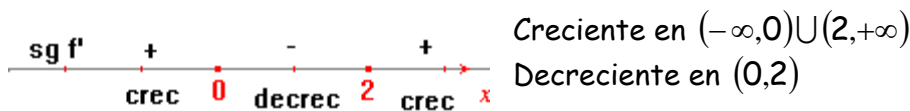
Derivabilidad: esta función no es derivable en tres puntos:

$x = 0$; $x = -1,8$; $x = 1,8$ (aprox)

En esos tres puntos las pendientes de las rectas tangentes por la derecha y por la izquierda son diferentes, es decir, las derivadas laterales en cada uno de esos puntos no coinciden.

5.- Estudia el crecimiento de la función $y = x^3 - 3x^2 + 4$

$$y' = 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(3x - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 6 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$



Máximo en $x = 0 \rightarrow y = 0^3 - 3 \cdot 0 + 4 = 4 \rightarrow$ MÁXIMO $(0, 4)$

Mínimo en $x = 2 \rightarrow y = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0 \rightarrow$ MÍNIMO $(2, 0)$