CONTROL ANÁLISIS Mayo 2009

1.- Encuentra los valores de a y b para los que la función

$f(x)=\begin{cases} 2x^2+ax+b & \text{si } x<0 \\ 3x-5 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ es derivable en R. Para esos valores halla f'(x)

(1,5 puntos)

2.- Entre todos los triángulos isósceles de perímetro 30 cm ¿cuál es el de área máxima?

(2 puntos)

3.- Dada la función: $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ (3 puntos)

a) Estudia su continuidad.
b) Halla sus asíntotas.
c) Halla sus extremos relativos.
d) Represéntala gráficamente.

4.- Sea la función $f(x)=x^3+bx^2+cx+2$. Halla b y c sabiendo que en los puntos de abscisa 0 y 1 la recta tangente es horizontal. (1,5 puntos)

5.- Calcula las siguientes integrales: (2 puntos)

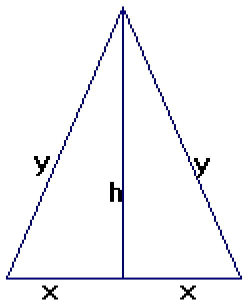
a) $\int \dfrac{5}{4+x^2}dx$ b) $\int \dfrac{x^4-2x^2+7}{x^3}dx$

SOLUCIONES

1. $f(x)=\begin{cases}2x^2+ax+b & \text{si } x<0\\ 3x-5 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$ los dos trozos son funciones polinómicas, así que son continuas y derivables cada uno en el intervalos donde está definido.
Para que sea derivable en R falta, por tanto, que sea continua y derivable en x = 0
Continuidad en x = 0 Derivabilidad en x = 0

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-5\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(2x^2+ax+b)=b\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(3x-5)=-5\end{array}\right\} b=-5$$

2. Observando el dibujo: 30 = 2x + 2y , de donde y = 15 - x



La función de la que hay que hallar el máximo es el área:
$A=\dfrac{b\cdot h}{2}=\dfrac{2xh}{2}$, pero
$h=\sqrt{y^2-x^2}=\sqrt{(15-x)^2-x^2}=\sqrt{225-30x}$
Por tanto: $A=x\sqrt{225-30x}=\sqrt{225x^2-30x^3}$
Y su derivada $A'=\dfrac{450x-90x^2}{2\sqrt{225x^2-30x^3}}=0$ de donde x=0 ó x=5
Para x=5, tenemos un máximo, y a que la derivada A' pasa de positiva (creciente) a negativa (decreciente)

Solución: triángulo equilátero de lado 10 cm.

3. $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ a) Continua en $R-\{1\}$, discontinuidad de salto infinito en x=1 (ver apartado b)

b) Asíntotas:

Vertical: **x = 1** $\to \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{x-1}=\infty \to \left\langle\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty\end{array}\right.$

Horizontal: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x-1}=\infty$ no tiene

Oblicua: $y=mx+n\to m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2-x}=1;\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-x^2+x}{x-1}\right)=1$

Asíntota oblicua: $y=x+1$

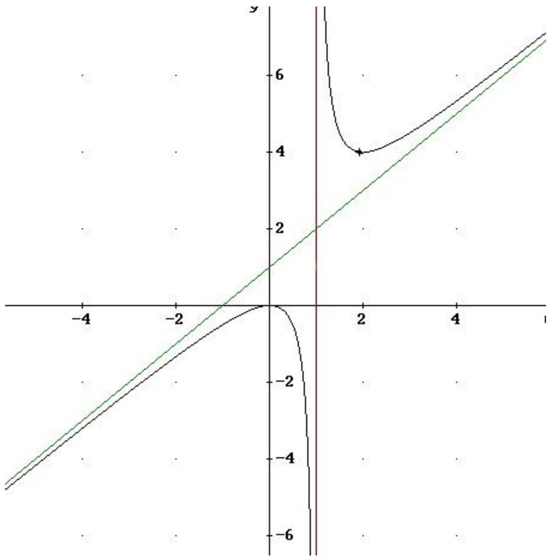
c) Extremos relativos:

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0\rightarrow x(x-2)=0\rightarrow\left\langle\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$$

sg(f')	+	0	-	1	-	2	+
	crec	MAX	decrec	AV	decrec	MIN	crec

Máximo $(0,0)$ Mínimo $(2,4)$

Representación gráfica:



4.- Sea la función $f(x)=x^3+bx^2+cx+2$. Halla b y c sabiendo que en los puntos de abscisa 0 y 1 la recta tangente es horizontal $\rightarrow f'(0)=0;\quad f'(1)=0$

$$f'(x)=3x^2+2bx+c\rightarrow\left.\begin{array}{l}f'(0)=c=0\\f'(1)=3+2b+c=0\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}c=0\\3+2b=0\end{array}\right\}\rightarrow c=-\frac{3}{2}$$

5.- a) $\displaystyle\int\frac{5}{4+x^2}dx=5\int\frac{\frac{1}{4}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx=\frac{5}{2}\int\frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx=\frac{5}{3}\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)+C$

b) $\displaystyle\int\frac{x^4-2x^2+7}{x^3}dx=\int xdx-2\int\frac{1}{x}dx+7\int\frac{1}{x^3}dx=\int xdx-2\int\frac{1}{x}dx+7\int x^{-3}dx=$

$$=\frac{x^2}{2}-2\ln|x|+\frac{x^{-2}}{-2}+C=\frac{x^2}{2}-2\ln|x|-\frac{1}{2x^2}+C$$