GLOBAL ANÁLISIS 4

1.- Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = sen\ x$ y las rectas tangentes a dicha gráfica en los puntos de abscisas $x = 0$ y $x = \pi$. Representa la función y ambas rectas gráficamente y señala el recinto del que vas a hallar el área.

(3 puntos)

ELIGE 4 DE LOS 6 EJERCICIOS SIGUIENTES (1'75 puntos cada uno)

2.- Halla los valores de a y b para que la función *f* sea derivable en R

$$f(x) = \begin{cases} Ln(e + sen\ x) & si\ x < 0 \\ x^3 + ax + b & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

3.- Aprovechando como hipotenusa una pared de $\sqrt{200}$ m, se desea acotar una superficie triangular de área máxima. ¿Qué medidas deberán tener los otros dos lados (catetos)?

4.- La función f(x)= x^3+ ax^2+ bx+ c tiene un punto de derivada nula en (1,1), que no es un extremo relativo. Halla razonadamente a, b y c.

5.- Sea f la función dada por $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

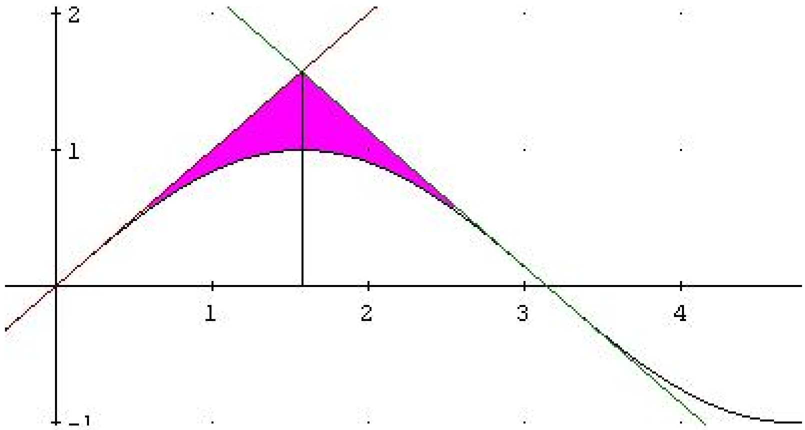
a) Determina sus asíntotas.
b) Determina sus extremos locales e intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Realiza un esbozo de su gráfica.

6.- Calcula los máximos y mínimos, si los tiene, de la función $y = \left|4 - x^2\right|$ sobre el intervalo $-3 \leq x \leq 3$

7.- Calcula $\int \ln(x^2 + 1)\, dx$

SOLUCIONES

1.- Hallamos las tangentes en los puntos indicados:
ecuación de la recta tangente: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
en $x_0 = 0 \rightarrow f'(x) = \cos x \rightarrow f'(0) = \cos 0 = 1;\ f(0) = sen\ 0 = 0$
$y - 0 = 1(x-0) \rightarrow y = x$
en $x_0 = \pi \rightarrow f'(x) = \cos x \rightarrow f'(\pi) = \cos\pi = -1;\ f(\pi) = sen\ \pi = 0$
$y - 0 = -1(x-\pi) \rightarrow y = -x + \pi$
Representamos gráficamente la función seno y las dos rectas tangentes:



Para hallar el área del recinto coloreado necesitamos conocer el punto de corte de ambas rectas, para ello vamos a resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y = x \\ y = -x+\pi \end{array}\right\}$$

$$x = -x + \pi \Rightarrow 2x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \rightarrow y = \frac{\pi}{2}$$

El área pedida será: $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\, x\ dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-x+\pi)dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sen\, x\ dx =$

$$= \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - (-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left. -\frac{x^2}{2} + \pi x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - (-\cos x)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 - \frac{\pi^2}{2} + \pi^2 +$$

$$+ \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} + \cos\pi - \cos\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi^2}{8} - 2 = \frac{\pi^2 - 8}{4} \text{ u.a.}$$

2.- $f(x) = \begin{cases} Ln(e + sen\ x) & si\ x < 0 \\ x^3 + ax + b & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$ cada trozo es continuo, el primero por ser un logaritmo de un argumento positivo (siempre) ya que el seno nunca es menor que –1 , y el segundo es una función polinómica, luego habrá que estudiar qué pasa en x =0

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 + 0 + b = b \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} Ln(e + sen\ x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x^3 + ax + b) = b \end{array}\right\} \rightarrow b = 1 \rightarrow f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x}{e + sen\ x} & x < 0 \\ 3x^2 + a & x > 0 \end{cases} \rightarrow \frac{1}{e} = a$$

3.- Triángulo rectángulo de catetos x e y. Se cumple que $x^2 + y^2 = 200$;

$y = \sqrt{200 - x^2}$ Función de la que queremos hallar el máximo

$$A = \frac{x.y}{2} = \frac{x\sqrt{200 - x^2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{200x^2 - x^4}$$

y su derivada $A' = \frac{1}{2}.\frac{400x - 4x^3}{\sqrt{200x^2 - x^4}} = \frac{100x - x^3}{\sqrt{200x^2 - x^4}} = 0$, de donde x=0 , x=-10 ó x= 10, solo nos sirve x = 10 (longitud positiva).

En x = 10, la derivada A' pasa de positiva (creciente) a negativa (decreciente), por lo que tenemos un máximo.

Solución: los catetos tienen que medir 10m cada uno

4.- f(x)=x^3+ax^2+bx+c Sabemos que :

$f'(1) = 0$ (derivada nula en (1,1))

$f(1) = 1$ ("pasa" por el punto (1,1))

$f''(1) = 0$ (NO es un extremo relativo $\rightarrow$ pto de inflexión)

Hallamos las derivadas: $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ y $f''(x) = 6x + 2a$

Y sustituimos: $f'(1) = 3\cdot 1^2 + 2a\cdot 1 + b = 0 \rightarrow 3 + 2a + b = 0 \rightarrow 3 - 6 + b = 0 \Rightarrow b = 3$

$f(1) = 1 + a + b + c = 1 \rightarrow 1 - 3 + 3 + c = 1 \Rightarrow c = 0$

$f''(1) = 6 + 2a = 0 \Rightarrow a = -3$

De donde, tendremos que $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

5.- $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ $\qquad Dom(f) = R - \{-1, 1\}$

a) Asíntotas: Verticales: x = 1 y x = -1 de ramas divergentes

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{0}\left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^3}{x^2-1} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^3}{x^2-1} = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty \end{array}\right. \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{0}\left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3}{x^2-1} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3}{x^2-1} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \end{array}\right.$$

Oblicua: $y = mx + n$ $\qquad m = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x(x^2-1)} = 1$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{x^2-1} - x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1}\right] = 0$$ asíntota oblicua: $y = x$

b) $f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2-1) - x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \rightarrow x^2(x^2 - 3) = 0$

posibles extremos: $x = 0, \quad x = -\sqrt{3}, \quad x = \sqrt{3}$

estudiando el signo de la derivada vemos que:

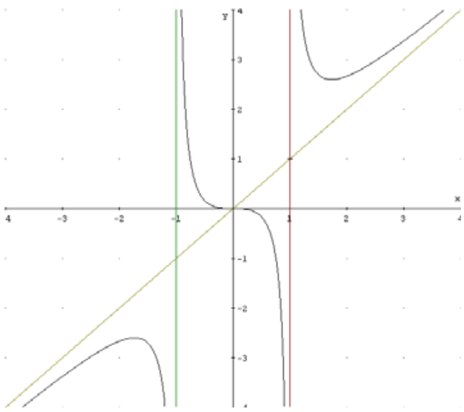
f es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

f decrece en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

Máx $(-\sqrt{3}, -2'6)$, Mín $(\sqrt{3}, 2'6)$

P.Inflexión (0,0)

c) gráfica

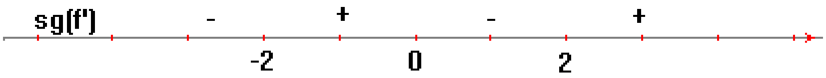


6.- $y=\left|4-x^2\right|$ en $[-3,3]$ $4-x^2=0 \Rightarrow x=\pm 2$

$$y=\left|4-x^2\right|=\begin{cases} x^2-4 & -3\le x<-2 \\ 4-x^2 & -2\le x\le 2 \\ x^2-4 & 2<x\le 3 \end{cases} \rightarrow y'=\begin{cases} 2x & -3<x<-2 \\ -2x & -2<x<2 \\ 2x & 2<x<3 \end{cases} \text{ no es derivable en } \pm 2$$

Posibles extremos: $-2x=0 \Rightarrow x=0$ y también los puntos donde no es derivable x =2 y x = -2

Vemos el crecimiento:



Por lo tanto, tenemos mínimos en -2 y 2 y máximo en 0

Mínimos: $(-2,0)$ $(2,0)$ Máximo $(0,4)$

7.- $\int \ln(x^2+1)\,dx = x\ln(x^2+1)-\int \frac{2x^2}{1+x^2}dx = x\ln(x^2+1)-2\int \frac{1+x^2}{1+x^2}+\frac{-1}{1+x^2}\,dx =$

$$\left.\begin{array}{l} u=\ln(x^2+1) \\ dv=dx \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} du=\dfrac{2x}{1+x^2}dx \\ v=x \end{array}\right\}$$ solución I= $\frac{x^2+1}{2}\text{arctg x}-\frac{x}{2}+C$

$= x\ln(x^2+1)-2\int 1dx+2\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = x\ln(x^2+1)-2x+2arctg\,x+C$