CONTROL GEOMETRÍA 2

1. Considera los puntos A(1,2,3), B(3,2,1) y C(2,0,2). Halla el punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano que contiene a A, B y C. (3 puntos)

2. Calcula la distancia entre las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x - z = -2 \\ y - z = -4 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$ (3puntos)

Calcula también el ángulo que forman sus vectores de dirección. (1 punto)

3. Calcula un punto A de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 - 2\lambda \end{cases}$ que equidista de los puntos P(1,0,-1) y Q(2,1,1). (2 puntos)

Halla la ecuación del plano que contiene a A, P y Q. (1 punto)

SOLUCIONES

1. Empezamos hallando la ecuación del plano que pasa por A,B y C. (punto A, vectores de dirección $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$)

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x+z-4=0$$ Ahora, hallamos la recta perpendicular a este plano y que pasa por O(0,0,0): $\vec{d} = \vec{n} = (1,0,1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}$, y su intersección con el plano: $\lambda+\lambda-4=0 \Rightarrow 2\lambda=4 \Rightarrow \lambda=2$, de donde P(2,0,2) es el punto medio del segmento OO' (siendo O' el punto simétrico de O), aplicando la fórmula del punto medio, tendremos que $O'(4,0,4)$ es el punto pedido.

2. $r \equiv \begin{cases} x-z=-2 \\ y-z=-4 \end{cases}$ $\quad s \equiv \begin{cases} x-z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$ $\quad$ las ponemos en paramétricas:

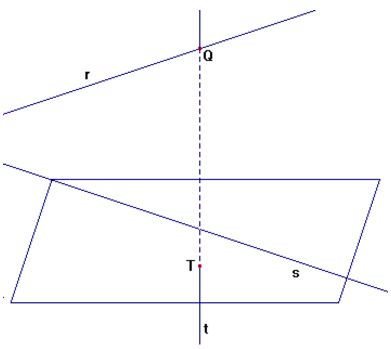
$$r \equiv \begin{cases} x=-2+z \\ y=-4+z \end{cases} \rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-2+\lambda \\ y=-4+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} ; \qquad s \equiv \begin{cases} x=z \\ y=-z \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} x=\mu \\ y=-\mu \\ z=\mu \end{cases}$$

Posición relativa de las rectas, estudiamos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} -2+\lambda=\mu \\ -4+\lambda=-\mu \\ \lambda=\mu \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} \lambda-\mu=2 \\ \lambda+\mu=4 \\ \lambda-\mu=0 \end{array}\right\} \rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow r(A)=2; r(A^*)=3$$

Sistema incompatible y además $\vec{d_r}=(1,1,1)$ $\vec{d_s}=(1,-1,1)$ no paralelos, luego las rectas se cruzan.

Para hallar la distancia de r a s (d(r,s)), vamos a hallar la ecuación del plano que contiene a s y es paralelo a r, y después la distancia de r a ese plano.



Punto de s $\rightarrow P(0,0,0)$ vectores de dirección del plano los de ambas rectas $\vec{d_r}=(1,1,1)$ $\vec{d_s}=(1,-1,1)$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x+y-z-z+x-y=0$$

Plano: $2x-2z=0 \rightarrow x-z=0$

Para hallar la distancia de r al plano, tomamos un punto de $r \rightarrow Q(-2,-4,0)$

Hallamos la ecuación de la recta t que pasa por P y es perpendicular al plano, luego su vector de dirección será el normal del plano $\rightarrow \vec{d} = \vec{n} = (1,0,-1)$

Recta $t \equiv \begin{cases} x = -2+\beta \\ y = -4 \\ z = -\beta \end{cases}$, ahora el punto T (intersección de la recta t con el plano) $(-2+\beta)-(-\beta) = 0 \Rightarrow -2+\beta+\beta = 0 \Rightarrow 2\beta = 2 \Rightarrow \beta = 1$

Punto T $\begin{cases} x = -2+1 = -1 \\ y = -4 \\ z = -1 \end{cases} \rightarrow T\left(-\frac{2}{3},-4,-\frac{4}{3}\right)$ Y por último, la distancia pedida:

$$d(r,s) = d(Q,T) = \sqrt{(-2+1)^2+(-4+4)^2+(0+1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}\ u$$

Ángulo de los vectores de dirección $\vec{d_r} = (1,1,1)$ $\vec{d_s} = (1,-1,1)$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{d_r}\cdot\vec{d_s}}{\left|\vec{d_r}\right|\left|\vec{d_s}\right|} = \frac{1-1+1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{1}{3} \rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = 70^\circ 32'$$

3. $r \equiv \begin{cases} x = 5+\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2-2\lambda \end{cases}$, equidista de los puntos P(1,0,-1) y Q(2,1,1)

Un punto de la recta r es $A(5+\lambda,\lambda,-2-2\lambda)$: $d(A,P) = d(A,Q)$

$$\sqrt{(1-5-\lambda)^2+(-\lambda)^2+(-1+2+2\lambda)^2} = \sqrt{(2-5-\lambda)^2+(1-\lambda)^2+(1+2+2\lambda)^2}$$

$$(-4-\lambda)^2+\lambda^2+(1+2\lambda)^2 = (-3-\lambda)^2+(1-\lambda)^2+(3+2\lambda)^2$$

$$16+8\lambda+\lambda^2+\lambda^2+1+4\lambda+4\lambda^2 = 9+6\lambda+\lambda^2+1-2\lambda+\lambda^2+9+12\lambda+4\lambda^2$$

$$4\lambda+2 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \rightarrow A = \begin{cases} x = 5-\frac{1}{2} = \frac{9}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = -2+\frac{2}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{9}{2},-\frac{1}{2},-1\right)$$

Halla la ecuación del plano que contiene a A, P y Q

Punto P(1,0,-1) y vectores de dirección $\vec{d} = \overrightarrow{PA}$ y $\vec{e} = \overrightarrow{PQ}$

$\vec{d} = \left(\frac{7}{2},-\frac{1}{2},0\right) \rightarrow (7,-1,0)$ y $\vec{e} = (1,1,2)$, plano pedido:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 7 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x+2+7z+7+z+1-14y = 0 \rightarrow 2x+14y-8z-10 = 0$$

Plano pedido: $x+7y-4z-5 = 0$