CONTROL ÁLGEBRA

1.- a) Halla el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 12 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

b) Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & 4 & b \end{pmatrix}$. Calcula a y b para que su rango sea 1.

2.- Resuelve el siguiente sistema matricial:

$$3X - 2Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix}; \quad 2X + Y = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

3.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calcula:

a) Las matrices inversas de las matrices $I+A$ y $I-A$.

b) $(I+A)(I-A)^{-1}$

4.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ y utilizando correctamente las propiedades de los

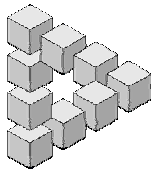
determinantes, calcula:

a) $\begin{vmatrix} a+2d & c+2f & b+2e \\ d & f & e \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} f & e & d \\ c & b & a \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3d & 3e & 3f \\ a & b & c \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

PUNTUACIÓN: 2,5 puntos cada ejercicio



SOLUCIONES

1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 12 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 12 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_2 + F_1 \\ F_3 - F_1 \\ F_4 - 2F_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_4 - F_3 \\ F_3 + 3F_2 \end{matrix}} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 36 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + 3F_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \text{ de donde } \text{rango}(A) = 3$$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & 4 & b \end{pmatrix}$ para que el rango sea 1, las dos filas tienen que ser linealmente

dependientes, es decir una de ellas combinación lineal de la otra, o sea, proporcionales; para que esto ocurra como el elemento central es $4 = 2 \cdot 2$, tendrá que ser $a = 1 \cdot 2 = 2$ y $b = 0 \cdot 2 = 0$

2) Llamamos: $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

Así, el sistema queda:

$$\left. \begin{matrix} 3X - 2Y = A \\ 2X + Y = B \end{matrix} \right\} \text{ y resolviendo, tenemos que } X = \frac{1}{7}(2B + A); \quad Y = \frac{1}{7}(3B - 2A)$$

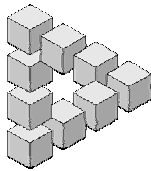
Hacemos las cuentas: $2B + A = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ -7 & 21 & 14 \\ 35 & -14 & 0 \end{pmatrix}$ de donde $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$$3B - 2A = \begin{pmatrix} 21 & -7 & 14 \\ -28 & 0 & 21 \\ 0 & -7 & -14 \end{pmatrix}, \text{ de donde } Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

3) a) matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow I + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$(I + A)^{-1} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$(I + A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) (\mathbf{I}+\mathbf{A})(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ y utilizando correctamente las propiedades de los

determinantes, calcula:

$$a) \begin{vmatrix} a+2d & c+2f & b+2e \\ d & f & e \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad C_2 \leftrightarrow C_3 = - \begin{vmatrix} a+2d & b+2e & c+2f \\ d & e & f \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2d & 2e & 2f \\ d & e & f \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2^\circ \text{ determinante nulo } F_1 \text{ y } F_2 \text{ proporcionales})$$

$$= -2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$b) \begin{vmatrix} f & e & d \\ c & b & a \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad C_1 \leftrightarrow C_3 = - \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = F_1 \leftrightarrow F_2 = \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$c) \begin{vmatrix} 3d & 3e & 3f \\ a & b & c \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = F_1 \leftrightarrow F_2 = 3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$