

CONTROL ÁLGEBRA

1.- Comprueba, sin desarrollar y aplicando las propiedades de los determinantes

que:
$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0 \quad (1,5 \text{ puntos})$$

2.- Sea A la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

- Calcula los valores de λ para los que el determinante de $A - 2I$ es cero.
- Calcula la matriz inversa de $A - 2I$ para $\lambda = 0$. (Por adjuntos) (3 puntos)

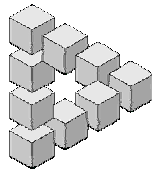
3.- Considera el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x + y + mz = 1 \\ my - z = -1 \\ x + 2my = 0 \end{array} \right\} \quad (4 \text{ puntos})$$

Clasifica el sistema según los valores de m y resuélvelo cuando sea compatible.

4.- Escribe **razonadamente** los siguientes ejemplos: (1,5 puntos)

- Un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas que sea compatible indeterminado.
- Un sistema de cuatro ecuaciones y tres incógnitas que sea incompatible.
- Un sistema de dos ecuaciones que sea compatible determinado.



SOLUCIÓN

$$1.- \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = (C_3 + C_2) = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ ya que}$$

tiene dos columnas (primera y tercera) iguales.

$$2.- \text{Sea } A \text{ la matriz } \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } I \text{ la matriz identidad de orden 3.}$$

a) Calcula los valores de λ para los que el determinante de $A - 2I$ es cero.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda - 2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda - 2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) - \lambda^2(\lambda - 2) = (\lambda - 2)(1 - \lambda^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = \pm 1 \end{cases}$$

b) Calcula la matriz inversa de $A - 2I$ ($= B$) para $\lambda = 0$

Para $\lambda = 0$, el determinante es distinto de cero y por lo tanto, existe inversa:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \text{ Hallamos los adjuntos:}$$

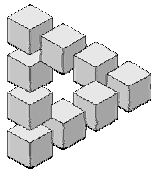
$$B_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2; B_{12} = -\begin{vmatrix} -5 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5; B_{13} = \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$B_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; B_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; B_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$B_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = 0; B_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = 5; B_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3.- \left. \begin{cases} x+y+mz=1 \\ my-z=-1 \\ x+2my=0 \end{cases} \right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 2m & 0 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m & -1 & -1 \\ 1 & 2m & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Para discutir el sistema, estudiamos los rangos de la matriz del sistema A y de la ampliada A^* :

El rango de A es, por lo menos 2 ya que tiene un menor de segundo orden distinto

de cero $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, veamos el determinante de A :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 2m & 0 \end{vmatrix} = -1 - m^2 + 2m \rightarrow -m^2 + 2m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-2} = 1$$

Para $m = 1$ $\text{rango}(A) = 2$, veamos cuál es el rango de la matriz ampliada:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ tiene dos columnas iguales (3ª y 4ª), luego el rango es también}$$

2, es decir que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$ Sistema compatible indeterminado.

Lo resolvemos: (nos quedamos con las ecuaciones en las que está el menor de 2º orden distinto de cero, es decir, quitamos la primera) y hacemos $y = t$

$$\begin{cases} y - z = -1 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Solución: } \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Para $m \neq 1$ $\text{rango}(A) = 3 = \text{rango}(A^*)$ Sistema compatible determinado.

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ my - z = -1 \\ x + 2my = 0 \end{cases} \quad |A| = -m^2 + 2m - 1 = -(m-1)^2 \quad \text{Lo resolvemos por Cramer:}$$

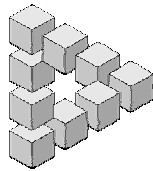
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ -1 & m & -1 \\ 0 & 2m & 0 \end{vmatrix}}{-(m-1)^2} = \frac{-2m^2 + 2m}{-(m-1)^2} = \frac{-2m(m-1)}{-(m-1)^2} = \frac{2m}{m-1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-(m-1)^2} = \frac{m-1}{-(m-1)^2} = \frac{-1}{m-1}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 2m & 0 \end{vmatrix}}{-(m-1)^2} = \frac{-1 - m + 2m}{-(m-1)^2} = \frac{-1}{m-1}$$

4.- Escribe **razonadamente** los siguientes ejemplos:

- a) Un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas que sea compatible indeterminado.

Para que sea compatible indeterminado, tienen que ser los rangos de la matriz del sistema y de la matriz ampliada iguales pero menores que 3.



$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ tiene rango 2, ya que la primera y tercera columnas son

proporcionales, si lo ampliamos con la columna $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, el rango será 2.

Luego un sistema compatible indeterminado sería: $\left. \begin{array}{l} x - z = 0 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x - y - z = -1 \end{array} \right\}$

b) Un sistema de cuatro ecuaciones y tres incógnitas que sea incompatible. Tienen que tener rangos distintos las matrices del sistema y ampliada, por

ejemplo 2 y 3: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (1ª y 3ª columnas proporcionales)

y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ que tiene rango 3, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Luego, un sistema incompatible, de cuatro ecuaciones con tres incógnitas es:

$\left. \begin{array}{l} x - z = 1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ -x + z = 1 \end{array} \right\}$

c) Un sistema de dos ecuaciones que sea compatible determinado.

Tendrán que ser los dos rangos 2, por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo: $\left. \begin{array}{l} x + y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{array} \right\}$