MATEMÁTICAS II

EXAMEN GEOMETRÍA

1. Considera los puntos A(2,1,2) y B(0,4,1) y la recta r de ecuación $x = y - 2 = \dfrac{z-3}{2}$

a) Determina un punto C de la recta r que equidiste de los puntos A y B. (1,5 ptos)

b) Calcula el área del triángulo de vértices ABC. (1 punto)

2. Dados el punto P(3,3,3) y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta r. (1 punto)

b) Determina el punto Q, simétrico de P respecto de la recta r, explicando el procedimiento seguido. (1,5 puntos)

3. Considera los planos $\pi_1 \equiv \begin{cases} x = -\dfrac{5}{2} \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$ y $\pi_2 \equiv 3x + 3y - 4 = 0$

a) ¿Qué ángulo determinan ambos planos? (1,25 puntos)

b) Halla el plano que pasa por el punto P(1,1,1) y es perpendicular a los dos planos dados. (1,25 puntos)

4. Se considera la recta r definida por $\begin{cases} y = z - 1 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$ y la recta s definida por

$$\begin{cases} x = \mu \\ y = 0 \\ z = 1 + \mu \end{cases}$$

a) Posición relativa de las rectas r y s. (0,75 puntos)

b) Halla la ecuación de la recta perpendicular común a r y s. (1,75 puntos)

SOLUCIONES

1. A(2,1,2) y B(0,4,1) y recta $r \equiv x = y - 2 = \frac{z-3}{2}$

a) Determina un punto C de la recta r que equidiste de los puntos A y B.

recta en paramétricas $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 3+2\lambda \end{cases} \rightarrow$ Punto genérico $P(\lambda, 2+\lambda, 3+2\lambda)$

Equidista $\Leftrightarrow d(A,P) = d(B,P)$ es decir,

$$\sqrt{(\lambda-2)^2+(2+\lambda-1)^2+(3+2\lambda-2)^2} = \sqrt{(\lambda)^2+(2+\lambda-4)^2+(3+2\lambda-1)^2}$$
$$\sqrt{(\lambda-2)^2+(1+\lambda)^2+(1+2\lambda)^2} = \sqrt{(\lambda)^2+(\lambda-2)^2+(2+2\lambda)^2}$$
$$\lambda^2-4\lambda+4+1+2\lambda+\lambda^2+1+4\lambda+4\lambda^2 = \lambda^2+\lambda^2-4\lambda+4+4+8\lambda+4\lambda^2$$
$$1+2\lambda+1+4\lambda = 4+8\lambda \rightarrow 2\lambda = -2 \rightarrow \lambda = -1 \rightarrow C(-1,1,1)$$

b) Calcula el área del triángulo de vértices ABC.

A(2,1,2) , B(0,4,1) y C(-1,1,1) $\rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2,3,-1); \overrightarrow{AC} = (-3,0,-1)$

$$Area = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2} \rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i}+\vec{j}+9\vec{k}$$

$$Area = \frac{\sqrt{(-3)^2+1^2+9^2}}{2} = \frac{\sqrt{91}}{2}u^2$$

2. Punto $P(3,3,3)$ recta $r \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ 2x+z=0 \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta r.

Plano π: su vector normal será el vector director de r, pasamos r a paramétricas

$$r \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ 2x+z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-x \\ z=-2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=-\lambda \\ z=-2\lambda \end{cases} \rightarrow \vec{d} = (1,-1,-2) = \vec{n}$$

$\pi \equiv x-y-2z+D=0$ pasa por $P \rightarrow 3-3-2\cdot 3+D=0 \Rightarrow D=6$

Luego, tenemos que el plano es $\pi \equiv x-y-2z+6=0$

b) Una vez hallado el plano π, perpendicular a r y que pasa por P, la intersección de este plano con r nos dará el punto M, proyección ortogonal de P sobre r, éste punto es el punto medio del segmento PQ, y así tendremos el punto simétrico Q

Intersección de π y $r \rightarrow \lambda-(-\lambda)-2(-2\lambda)+6=0 \rightarrow 6\lambda+6=0 \rightarrow \lambda=-1$

Punto intersección (proyección ortogonal) $M \rightarrow \begin{cases} x = \lambda = -1 \\ y = -\lambda = 1 \\ z = -2\lambda = 2 \end{cases} \rightarrow M(-1,1,2)$

M es el punto medio del segmento PQ, sea Q(x,y,z), tendremos:

$$M(-1,1,2) = \left(\frac{3+x}{2}, \frac{3+y}{2}, \frac{3+z}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow Q(-5,-1,1)$$

3. Considera los planos $\pi_1 \equiv \begin{cases} x = -\dfrac{5}{2} \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$ y $\pi_2 \equiv 3x + 3y - 4 = 0$

c) ¿Qué ángulo determinan ambos planos?

Vamos a poner el plano π_1 en forma general: $\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x+\frac{5}{2} & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\pi_1 \equiv x + \dfrac{5}{2} = 0 \rightarrow \pi_1 \equiv 2x + 5 = 0$ y $\pi_2 \equiv 3x + 3y - 4 = 0$

Vectores normales $\vec{n}_1(2,0,0)$, $\vec{n}_2(3,3,0)$

$$cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{6}{2\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow ang(\pi_1, \pi_2) = arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = 45^o$$

b) Halla el plano que pasa por el punto P(1,1,1) y es perpendicular a los dos planos dados.

Tenemos un punto (1,1,1) y dos vectores de dirección, que serán los vectores normales de ambos planos (ya que es perpendicular a éstos)

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 6z - 6 = 0 \rightarrow z - 1 = 0$$

4. Se considera la recta r definida por $\begin{cases} y = z - 1 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$ y la recta s definida por

$$\begin{cases} x = \mu \\ y = 0 \\ z = 1 + \mu \end{cases}$$

a) Posición relativa de las rectas r y s. $r \equiv \begin{cases} y = z - 1 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

Claramente incompatible, las rectas son paralelas o se cruzan, veamos los vectores directores: $r \rightarrow \vec{d_r} = (0,1,1)$ y $s \rightarrow \vec{d_s} = (1,0,1)$

No son proporcionales, luego las rectas se cruzan.

b)

Para hallar la perpendicular común buscamos un punto A de r y un punto B de s, de forma que estén a la mínima distancia, es decir que $\overrightarrow{AB} \perp \vec{d_r}$ y $\overrightarrow{AB} \perp \vec{d_s}$

O sea $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{d_r} = 0$, $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{d_s} = 0$, con A, punto genérico de $r \rightarrow (1, \lambda, 1 + \lambda)$ y B punto genérico de $s \rightarrow (\mu, 0, 1 + \mu) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (\mu - 1, -\lambda, \mu - \lambda)$

Y ahora los productos escalares:

$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{d_r} = 0 - \lambda + \mu - \lambda = 0 \Rightarrow -2\lambda + \mu = 0 \rightarrow \mu = 2\lambda$ y

$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{d_s} = \mu - 1 + 0 + \mu - \lambda = 0 \Rightarrow -\lambda + 2\mu = 1 \rightarrow -\lambda + 4\lambda = 1 \rightarrow \lambda = \frac{1}{3}, \quad \mu = \frac{2}{3}$

Punto $A \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{3} \\ z = 1 + \frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow A\left(1, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$, Punto $B \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 0 \\ z = 1 + \frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow B\left(\frac{2}{3}, 0, \frac{5}{3}\right)$

La recta pedida será la que pasa por A y B $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ Punto $A\left(1, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{AB} = (-1, -1, 1) \rightarrow \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \frac{1}{3} - \lambda \\ z = \frac{4}{3} + \lambda \end{cases}$$