

1. Dados los puntos  $A(2,1,-1)$  y  $B(-2,3,1)$  y la recta  $r$  definida por las

ecuaciones 
$$\begin{cases} x - y - z = -1 \\ 3x - 2z = -5 \end{cases}$$

Halla las coordenadas de un punto de la recta  $r$  que equidiste de los puntos  $A$  y  $B$ . (2,5 puntos)

2. Considera el plano  $\pi \equiv 2x + 2y - z - 6 = 0$  y la recta  $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$

a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano  $\pi$  con los ejes de coordenadas. (2 puntos)

b) Calcula, razonadamente, la distancia de la recta  $r$  al plano  $\pi$ . (1,5 pts)

3. Sean  $\pi$  y  $\pi'$  los planos determinados por los puntos siguientes:

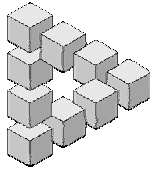
El plano  $\pi$  pasa por los puntos  $(0,2,1)$ ,  $(3,-1,1)$  y  $(1,-1,5)$  y el plano  $\pi'$  pasa por los puntos  $(3,0,2)$ ,  $(2,1,1)$  y  $(5,4,-2)$ .

Se pide calcular:

a) Ecuaciones paramétricas de la recta  $r$  intersección de ambos planos. (1,5 puntos)

b) El ángulo que forman los planos  $\pi$  y  $\pi'$ . (1 punto)

c) La ecuación del plano que contiene a la recta  $r$  y forma un ángulo de  $90^\circ$  con el plano  $\pi$ . (1,5 puntos)



## SOLUCIONES

1. Dados los puntos  $A(2,1,-1)$  y  $B(-2,3,1)$  y la recta  $r$  definida por las ecuaciones  $\begin{cases} x-y-z=-1 \\ 3x-2z=-5 \end{cases}$  Halla las coordenadas de un punto de la recta  $r$  que equidiste de los puntos  $A$  y  $B$ .

Ponemos  $r$  en paramétricas:

$$\begin{cases} x-y=-1+\lambda \\ 3x=-5+2\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{-5+2\lambda}{3} \\ y = \frac{-5+2\lambda}{3} + 1 - \lambda \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} x = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}\lambda \\ y = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \text{ Punto genérico de } r \rightarrow P\left(\frac{-5+2\lambda}{3}, -\frac{2+\lambda}{3}, \lambda\right); d(A,P) = d(B,P)$$

$$\sqrt{\left(\frac{-5+2\lambda}{3}-2\right)^2 + \left(\frac{-2-\lambda}{3}-1\right)^2 + (\lambda+1)^2} = \sqrt{\left(\frac{-5+2\lambda}{3}+2\right)^2 + \left(\frac{-2-\lambda}{3}-3\right)^2 + (\lambda-1)^2}$$

$$\left(\frac{-11+2\lambda}{3}\right)^2 + \left(\frac{-5-\lambda}{3}\right)^2 + (\lambda+1)^2 = \left(\frac{1+2\lambda}{3}\right)^2 + \left(\frac{-11-\lambda}{3}\right)^2 + (\lambda-1)^2$$

$$\left(\frac{121-44\lambda+4\lambda^2}{9}\right) + \left(\frac{25+10\lambda+\lambda^2}{9}\right) + (\lambda^2+2\lambda+1) = \left(\frac{1+4\lambda+4\lambda^2}{9}\right) + \left(\frac{121+22\lambda+\lambda^2}{9}\right) + (\lambda^2-2\lambda+1)$$

$$121-44\lambda+4\lambda^2+25+10\lambda+\lambda^2+18\lambda = 1+4\lambda+4\lambda^2+121+22\lambda+\lambda^2-18\lambda$$

$$-44\lambda+25+10\lambda+18\lambda = 1+4\lambda+22\lambda-18\lambda \Rightarrow (-44+10+36-22-4)\lambda = -24 \Rightarrow \lambda = 1$$

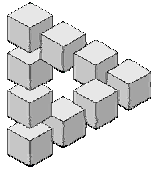
$$P\left(-\frac{5}{3} + \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}, 1\right) \rightarrow P(-1, -1, 1)$$

2. Considera el plano  $\pi \equiv 2x+2y-z-6=0$  y la recta  $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$

a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano  $\pi$  con los ejes de coordenadas.

$$\pi \equiv 2x+2y-z-6=0 \rightarrow OX \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow 2\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \rightarrow A(3,0,0)$$

$$\pi \equiv 2x+2y-z-6=0 \rightarrow OY \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow 2\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \rightarrow B(0,3,0)$$



## MATEMÁTICAS II

$$\pi \equiv 2x + 2y - z - 6 = 0 \rightarrow OZ \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \Rightarrow -\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -6 \rightarrow C(0,0,-6) \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\overline{AB} = (-3, 3, 0), \overline{AC} = (-3, 0, -6)$$

$$A = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| \Rightarrow A = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -6 & -3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{729} = \frac{27}{2} u^2$$

b) Calcula, razonadamente, la distancia de la recta  $r$  al plano  $\pi$ .

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}; \pi \equiv 2x + 2y - z - 6 = 0, \text{ estudiamos la posición relativa:}$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \rightarrow 2(1 + 2\lambda) + 2(-1 - \lambda) - 2\lambda - 6 = 0 \rightarrow 2 + 4\lambda - 2 - 2\lambda - 2\lambda - 6 = 0 \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

$0\lambda = 6$  El plano y la recta son paralelos, luego, para hallar la distancia entre ellos, tomaremos un punto de la recta  $r$  y calcularemos la distancia desde ese punto al plano:  $P(1, -1, 0)$

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 0 - 6|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{9}} = 2 u$$

3. Sean  $\pi$  y  $\pi'$  los planos determinados por los puntos siguientes:

El plano  $\pi$  pasa por los puntos  $(0, 2, 1)$ ,  $(3, -1, 1)$  y  $(1, -1, 5)$  y el plano  $\pi'$  pasa por los puntos  $(3, 0, 2)$ ,  $(2, 1, 1)$  y  $(5, 4, -2)$ .

Se pide calcular:

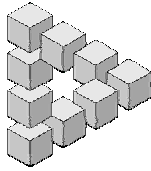
a) Ecuaciones paramétricas de la recta  $r$  intersección de ambos planos.

$$\text{Plano } \pi: P(0, 2, 1) \quad \vec{d} = \overline{AP} = (-3, 3, 0); \quad \vec{e} = \overline{BP} = (-1, 3, -4)$$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-1 \\ -3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -12x - 9z + 9 + 3z - 3 - 12y + 24 = 0 \rightarrow 2x + 2y + z - 5 = 0$$

$$\text{Plano } \pi': Q(3, 0, 2) \quad \vec{d} = \overline{CQ} = (1, -1, 1); \quad \vec{e} = \overline{DQ} = (-2, -4, 4) \rightarrow (-1, -2, 2)$$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-0 & z-2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -3y - 3z + 6 = 0 \rightarrow y + z - 2 = 0$$



$$\text{Recta pedida: } r \equiv \begin{cases} 2x+2y+z-5=0 \\ y+z-2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2-\lambda \\ 2x+4-2\lambda+\lambda=5 \end{cases} \rightarrow r \begin{cases} x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

b) El ángulo que forman los planos  $\pi$  y  $\pi'$ .

$$\pi \equiv 2x+2y+z-5=0 \rightarrow \vec{n}(2,2,1); \quad \pi': y+z-2=0 \rightarrow \vec{n}'(0,1,1)$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{n} \cdot \vec{n}'}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|} = \frac{2+1}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ$$

c) La ecuación del plano que contiene a la recta  $r$  y forma un ángulo de  $90^\circ$  con el plano  $\pi \equiv 2x+2y+z-5=0 \rightarrow \vec{n}(2,2,1)$

$$r \begin{cases} x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \rightarrow \text{Punto}\left(\frac{1}{2}, 2, 0\right), \quad \vec{d}\left(-\frac{1}{2}, -1, 1\right), \quad \vec{e} = \vec{n}(2,2,1)$$

$$\begin{vmatrix} x-\frac{1}{2} & y-2 & z-0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -x + \frac{1}{2} + 2y - 4 + z + 2z - 2x + 1 - \frac{1}{2}y + 1 = 0$$

$$-3x + \frac{3}{2}y + 3z - 2 = 0 \rightarrow 6x - 3y - 6z + 4 = 0$$