



1. Sean A , B , C y X matrices cualesquiera que verifican $AXB=C$
- a. Si las matrices son cuadradas de orden 3, y se sabe que el determinante de A es 3, el de B es -1 y el C es 6, calcula el determinante de las matrices X y $2X$. (1 punto)
- b. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ calcula la matriz X . (1,5 p)

2. a. Calcula la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (1 punto)

b. Escribe en forma matricial el siguiente sistema y resuélvelo usando la matriz A^{-1} hallada en el apartado anterior

$$\left. \begin{array}{l} x+y=1 \\ y+z=-2 \\ x+z=3 \end{array} \right\} (1,5 \text{ puntos})$$

3. Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x+y+z=a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{array} \right\}$$

- a. Discútelo según los valores del parámetro a . (1,5 puntos)
- b. Resuélvelo en el caso $a = 2$. (1 punto)

4. Clasifica y resuelve el siguiente sistema según los valores de a :

$$\left. \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ (a+1)y+2z=y \\ x-2y+(2-a)z=2z \end{array} \right\} (2,5 \text{ puntos})$$

SOLUCIÓN

1. Sean A , B , C y X matrices cualesquiera que verifican $AXB=C$

a. Si las matrices son cuadradas de orden 3, y se sabe que el determinante de A es 3, el de B es -1 y el C es 6, calcula el determinante de las matrices X y $2X$.

$$AXB=C \Rightarrow X=A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \Rightarrow |X|=|A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}|=\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{-1}=-2$$

$$|2X|=2^3 \cdot |X|=-16$$

b. Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ calcula la matriz X .

$$AXB=C \Rightarrow X=A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}; |A|=-2; |B|=-3+4=1$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; B^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} AXB=C \Rightarrow X &= A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 8 \\ 8 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. a. Calcula la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A|=1+1=2$

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1; A_{12}=-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1; A_{13}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1; A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1; A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1; A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1; A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1;$$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



b. Escribe en forma matricial el siguiente sistema y resuélvelo usando la matriz A^{-1} hallada en el apartado anterior

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=-2 \\ x+z=3 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{2}{2} - \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} - \frac{2}{2} + \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \\ z=0 \end{cases}$$

3. a. Discútelo según los valores del parámetro a

$$\begin{cases} x+y+z=a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 2; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 3a - 2 \rightarrow -a^2 + 3a - 2 = 0 \rightarrow a = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

Para $a = 1$, $r(A) = 2$, $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$; $r(A^*) = 3$

El sistema es INCOMPATIBLE

Para $a = 2$, $r(A) = 2$, $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $r(A^*) = 2$

El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO

Para $a \neq 1$ y $a \neq 2$, $r(A) = 3$, $r(A^*) = 3$ sistema COMP. DETERMINADO

b. Resuélvelo en el caso $a = 2$ (COMPATIBLE INDETERMINADO)

Para $a = 2$, $r(A) = 2$, $r(A^*) = 2$ con $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, por lo que nos quedamos con las dos primeras ecuaciones, es decir:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=1-z \\ 2x+y=2-2z \end{cases} \rightarrow x=1-z; 1-z+y=1-z \rightarrow \text{SOL} \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}$$

4. Clasifica y resuelve el siguiente sistema según los valores de a:

$$\left. \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ (a+1)y+2z=y \\ x-2y+(2-a)z=2z \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ ay+2z=0 \\ x-2y-az=0 \end{array} \right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & -2 & -a \end{pmatrix}$$

Sistema homogéneo, luego $r(A) = r(A^*)$ siempre, estudiemos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow r(A) \geq 2; |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & -2 & -a \end{vmatrix} = -a^2 - a + 6 = 0 \rightarrow a = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

Para $a = 2 \rightarrow r(A) = 2$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

Lo resolvemos:

$$\left. \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ 2y+2z=0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x+z=-y \\ 2z=-2y \end{array} \right\} \rightarrow z = -y; x = 0 \rightarrow \text{Solución: } \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

Para $a = -3 \rightarrow r(A) = 2$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

Lo resolvemos:

$$\left. \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ -3y+2z=0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x+z=-y \\ 2z=-3y \end{array} \right\} \rightarrow z = -\frac{3}{2}y; x = -y - \frac{3}{2}y = -\frac{5}{2}y \rightarrow \text{Solución: } \begin{cases} x = -\frac{5}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\frac{3}{2}\lambda \end{cases}$$

Para $a \neq 2$ y $a \neq -3 \rightarrow r(A) = 3$, sistema Compatible determinado, sólo tiene la solución trivial $(0,0,0)$