

1. Se consideran las matrices  $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  y  $B = A - kI$ , donde  $k$  es una constante e  $I$  la matriz identidad de orden 2.

a) Determina los valores de  $k$  para los que  $B$  no tiene inversa. (0,75 pts)

b) Calcula  $B^{-1}$  para  $k = 1$  (0,75 pts)

c) Determina las constantes  $\alpha, \beta$  para que se cumpla  $A^2 + \alpha A = \beta I$  (1,5 p)

2. Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

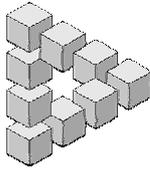
a) Calcula  $B \cdot C$  y  $C \cdot B$  (1 punto)

b) Calcula la matriz  $P$  que verifica  $AP - B = C^t$  (3 puntos)

3. a) Determina razonadamente los valores del parámetro  $m$  para los que el siguiente sistema de ecuaciones tiene más de una solución:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + z = mx \\ x + 2y + z = my \\ x + 2y + 4z = mz \end{array} \right\} \quad (1 \text{ punto})$$

b) Resuelve el sistema anterior para el caso  $m = 0$  y para el caso  $m = 1$ . (2 p.)



## SOLUCIONES

1. Se consideran las matrices  $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  y  $B = A - kI$ , donde  $k$  es una constante e  $I$  la matriz identidad de orden 2.

a) Determina los valores de  $k$  para los que  $B$  no tiene inversa.

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-k & 1 \\ 2 & -1-k \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -3-k & 1 \\ 2 & -1-k \end{vmatrix} = (-3-k)(-1-k) - 2 = k^2 + 4k + 1$$

$$k^2 + 4k + 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

$B$  no tiene inversa para  $k = -2 \pm \sqrt{3}$

b) Calcula  $B^{-1}$  para  $k = 1 \rightarrow B = \begin{pmatrix} -3-k & 1 \\ 2 & -1-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow |B| = 6$

$$B^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} B_{22} & -B_{12} \\ -B_{21} & B_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

c) Determina las constantes  $\alpha, \beta$  para que se cumpla  $A^2 + \alpha A = \beta I$

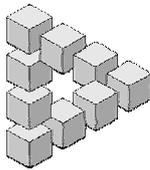
$$A^2 + \alpha A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3\alpha & \alpha \\ 2\alpha & -\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11-3\alpha & -4+\alpha \\ -8+2\alpha & 3-\alpha \end{pmatrix} = \beta I = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 11-3\alpha = \beta \\ -4+\alpha = 0 \\ -8+2\alpha = 0 \\ 3-\alpha = \beta \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha = 4 \\ 11-12 = \beta \\ 3-4 = \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha = 4 \\ \beta = -1 \end{array} \right\}$$

2. Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$a) B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$



b) Calcula la matriz P que verifica  $AP - B = C^t \rightarrow AP = C^t + B \rightarrow P = A^{-1}(C^t + B)$

$$C^t + B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad P = A^{-1}(C^t + B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3. a) Determina razonadamente los valores del parámetro m para los que el siguiente sistema de ecuaciones tiene más de una solución:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + z = mx \\ x + 2y + z = my \\ x + 2y + 4z = mz \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} (2-m)x + y + z = 0 \\ x + (2-m)y + z = 0 \\ x + 2y + (4-m)z = 0 \end{array} \right\} \text{ sistema homogéneo}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 2 & 4-m \end{pmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 2 & 4-m \end{vmatrix}$$

$$|A| = (2-m)^2(4-m) + 1 + 2 - 2 + m - 4 + 2m - 4 + m = -m^3 + 8m^2 - 16m + 9$$

para que el sistema tenga más de una solución (no solo la trivial) tiene que ser el determinante de A nulo, rango menor que 3.

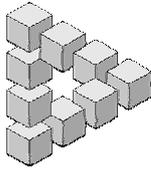
$$-m^3 + 8m^2 - 16m + 9 = 0 \Rightarrow m = 1; \quad -m^2 + 7m - 9 = 0 \rightarrow m = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Para esos valores de m el sistema tiene más de una solución.

b) Resuelve el sistema anterior para el caso m = 0 y para el caso m = 1.

Para m = 0

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 0 \\ x + 2my + z = 0 \\ x + 2y + 4z = 0 \end{array} \right\} A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow |A| \neq 0, \text{ solución trivial } (x=0, y=0, z=0)$$



## MATEMÁTICAS II

Para  $m = 1$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{array} \right\} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 0 \text{ Compatible indeterminado. Cogemos un}$$

$$\text{menor distinto de cero: } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = -\lambda \\ x + 2y = -3\lambda \end{array} \right\}$$

$$y = -2\lambda \rightarrow x = \lambda \Rightarrow \text{Solución: } \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$